7 BEBERAPA DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Ada beberapa bentuk untuk menyatakan disekitar peluang diskrit, yaitu secaragrafik, dalam bentuk tabel atau mungkin juga dalam bentuk rumus (persamaan). Persamaan-persamaan yang dihasilkan dari percobaan-percobaan, akan menggambarkan kelakuan suatu peubah acak. Banyak peubah acak yang dihasilkan dari percobaan mempunyai sifat yang sama. Oleh karena itu dapat dinyatakan dalam bentuk distribusi peluang yang sama.

Misalkan, peubah acak yang menyatakan banyaknya sukses dalam suatu percobaan dengan peluang sukses tetap dalam n kali percobaan , akan mempunyai ciri umum yang sama, Karenanya dapat dinyatakan dengan rumus tunggal . Beberapa percobaan berikut dapat dikategorikan ke dalam sukses / gagal :

a. percobaan menembak sasaran

b. pelanturan mata uang, muncul salah satu maka bisa dianggap sebagai sukses. dan seterusnya.

Dalam bab ini akan dibahas beberapa sifat distribusi peluang diskrit.

7.1. DISTRIBUSI BINOMIAL

Suatu percobaan yang terdiri dari dua hasil yang mungkin, katakanlah A dan bukan A ($\overline{A}$) dengan P(A) = P dan P($\overline{A}$) = 1 - P, berharga tetap dalam setiap percobaan, maka percobaan itu dinamakan Bernoneli.

Jika percobaan Bernoneli dilakukan sebanyak N kali secara independen, x diantaranya menghasilkan kejadian A dan sisanya (n-x) kejadian $\overline{A}$ (bukan A), maka peluang terjadinya A sebanyak X = x kali dari n percobaan, dinyatakan oleh rumus :

$$\mathbf{b(x,n,p):P(X = x) = \binom{n}{x} P^x(1-P)^{n-x}} \quad \text{..} \quad \mathbf{7\ (1)}$$

dengan

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

$N^{!} = n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 2\ (1)$

($N^{!}$ dibaca N faktorial)

Hubungan yang dinyatakan oleh rumus 7 (1) diatas dinamakan distribusi Binomial. Disekitar Binomial b (x, n , p) , mempunyai parameter rata-rata $\mu = np$ dan varians : $\sigma = npq$

Contoh 7.1

Peluang untuk mendapatkan 6 muka gambar (g) ketika melakukan undian dengan sebuah mata uang sebanyak 10 kali adalah :

$$P(G) = {}^{1}/_{2}$$
$$N = 10$$
$$X = 6$$

$$P(X = 6) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{1^6}{2} \frac{1^4}{2}$$

$$= \frac{10^{!}}{4^{!}6^{!}} \left(\frac{1}{2} \right)^{10}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6\ldots}{4.3.2.1.6.5.4\ldots} \left(\frac{1}{2} \right)^{10}$$

$$= 210 \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = 0{,}205$$

Contoh 7.2

10 % dari semacam benda tergolong kategori A. Sebuah sampel berukuran 30 diambil secara acak. Berapa peluang sampel itu akan berisi benda kategori A:

a. Semuanya

b. paling banyak 2 buah

Jawab:

$n = 30$ misalkan X : benda termasuk kategori A

$p = 0{,}1$

a. $X = 30$

$$P(X=30) = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix} . (0{,}1)^{30} \cdot (0{,}9)^{0} = 10^{-30}$$

artinya untuk mendapatkan benda kategori A sebanyak 30 peluang nyaris nol.

b. X paling banyak 2, berarti $X \leq 2$

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x=0) = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} (0{,}1)^{0} . (0{,}9)^{30} = 0{,}0423$$

$$P(x=1) = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} (0{,}1)^{1}(0{,}9)^{20} = 0{,}1409$$

$$P(x=2) = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} (0{,}1)^{1}(0{,}9)^{28} = 0{,}227$$

maka

$$\begin{aligned} P(x \leq 2) &= 0{,}0423 + 0{,}1409 + 0{,}227 \\ &= 0{,}4102 \end{aligned}$$

Contoh 7.3.

Seorang menderita penyakit darah yang jarang terjadi, mempunyai peluang 0,4 untuk sembuh. Bila diketahui ada 15 orang yang telah mengidap penyakit tersebut, berapa peluangnya :

a. Paling sedikit 10 orang akan sembuh

b. antara 3 sampai 8 orang akan sembuh

c. Ada 5 orang yang sembuh.

Jawab :

Misalkan X = banyak penderita yang sembuh

a. $P(X \geq 10) \quad = 1 - P(X < 10)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{9} \binom{n}{x} P^x (n-P)^{n-x}$$

$$= 1 - 0{,}9667$$

$$= 0{,}0338$$

b. $P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-X}$

$$= 0{,}8779$$

c. $P(X = 5) \quad = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$

$$= 0{,}186.$$

7.2. DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Jika percobaan binomial berkembang dengan memberikan lebih dari dua hasil yang mungkin, baukan hanya kategori sukses dan gagal, maka percobaan itu dinamakan multinomial .

Misalkan sebuah percobaan menghasilkan K buah hasil yang mungkin $E_1, E_2, ..., E_k$ dengan peluang $P_1, P_2, ..., P_k$, Jika percobaan dilakukan sebanyak n kali, maka peluang akan terdapat x_1, kejadian E_1, x_2 kejadian E_2 ..., x_k kejadian E_k diantara n ditentukan oleh distribusi multinomial sebagai berikut:

$$P(x_1,x_2, \dots ,x_k) = \frac{N!}{x_1!x_2!\dots x_k!} P_1^2 . P_2^2 \dots P_k^k \quad \dots\dots\dots\dots 7(2)$$

Contoh 7.4.

Sebuah kotak berisi 3 bola kecil berwarna merah, 4 berwarna hijau dan 5 berwarna kuning. Identitas lainnya homogen (sama). Sebuah barang diambail secara acak dari kotak itu, dilihat warnanya, lalu dikembalikan lagi ke dalam kotak. Tentukan peluang diantara 6 bola yang diambil dengan cara seperti terdapat 1 bola merah , 2 bola hijau dan 3 bola kuning.

Jawab :

P(warna merah) = P(M) = 3/12

P(warna hijau) = P(H) = 4/12

P(warna kuning) = P(K) = 5/12

$$P(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^3$$

$$= 0{,}1236$$

Contoh 7.5.

Bila dua buah dadu dilanturkan 6 kali, berapakah peluang mendapat jumlah 7 atau 11 muncul 2 kali, sepasang bilangan yang sama muncul 1 kali dan pasangan lainnya muncul 3 kali ?

Jawab :

Misalkan

E_1 = kejadian munculnya jumlah 7 atau 11

E_2 = kejadian munculnya pasangan bilangan yang sama

E_3 = kejadian munculnya pasangan lainnya.

$$P(E_1) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_3) = \frac{28}{36} = \frac{11}{18}$$

Menggunakan distribusi multinomial dengan $X_1 = 2$, $X_2 = 1$ dan $X_3 = 3$, diperoleh

$$P(X) = \frac{6!}{2!\quad 1!\quad 3!} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{11}{18}\right)^3$$

$$= 0{,}1127$$

7.3. DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Misalkan dalam sebuah populasi berukuran N terdapat D buah termasuk kategori A. Sebuah sampel acak berukuran n diambil dari populasi itu. Berapa peluang terdapat x buah termasuk kategori A dari sampel tersebut ?

Pertanyaan diatas, dijawab dengan distribusi hipergeometrik

$$P(x) = \frac{\binom{D}{N}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{..........} \quad 7(3)$$

dengan x = 1,2,...,n

sedangkan distribusi hipergeometrik mempunyai rata-rata $\mu = \frac{nD}{N}$

Contoh 7.6.

Sekelompok orang terdiri dari 50 orang dan 3 diantaranya lahir pada tanggal 1 Januari. Secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya :

a. tidak ada yang lahir pada tanggal 1 Januari

b. paling banyak 1 orang yang lahir tanggal 1 Januari

Jawab :

a. ambil X = banyak orang yang lahir tanggal 1 Januari

dengan N = 50 , n = 5, rumus 7(3) memberikan hasil :

$$P(1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}724$$

Peluangnya adalah 0,724 bahwa ke lima orang itu tidak lahir pada tanggal 1 Januari

b. dalam hal ini, x = 0 dan x = 1

$$P(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = 0{,}253$$

Sehingga , peluang paling banyak 1 orang dari 5 yang lahir pada tanggal 1 Januari adalah 0,724 + 0,253 = 0,977.

7.4. DISTRIBUSI POISSON

Suatu percobaan yang dilakukan sebanyak N kali, menghasilkan peubah acak X, misalkan banyaknya sukses selama selang waktu tertentu, dimana peluang terjadinya sangat kecil ($p \to 0$), maka percobaan tersebut dinamakan poisson.

Beberapa sifat distribusi poisson adalah sebagai berikut :

1. Banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu, tidak terpengaruh oleh apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah yang lain.
2. Peluang terjadinya suatu sukses dalam selang waktu atau daerah tertentu, sangat kecil (bisa diabaikan), sehingga rata-rata Np dianggap konstan (λ).

Beberapa contoh kejadian yang berdistribiusi poisson :

a. Banyaknya orang yang menemukan barang hilang di suatu tempat tertentu.
b. Dalam tempo 5 menit, operator telepon banyak menerima permohonan untuk disambungkan dan salah dalam menyambungkan.
c. Banyaknya hari sekolah yang libur karena banjir di daerah tertentu.

Fungsi peluang distribusi poisson adalah

$$\mathbf{P(X = \mu) = \frac{e^{-\lambda}\, X^{\mu}}{\mu\,!}} \quad \text{..........} \quad \mathbf{(7.4)}$$

dengan

$e = 2{,}7183$

$\lambda = 1{,}2{,}3, \ldots\ldots$

Contoh 7.7.

Suatu panitia terdiri dari 5 orang akan dipilih secara acak dari 3 kimiawan dan 5 fisikawan. Hitunglah distribusi peluang banyaknya kimiawan dalam panitia tersebut.

Jawab :

Misalkan X menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

Distribusi hipergeometrik disajikan dalam bentuk

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Contoh 7.8.

Peluang seseorang akan mendapat reaksi buruk setelah disunfik besarnya 0,0005. Dari 4000 orang yang disuntik, tentukan peluang yang mendapat reaksi buruk :

a. tidak ada
b. Ada 2 orang
c. Tentukan, ada berapa orang diharapkan yang akan mendapat reaksi buruk setelah disuntik.

Dari 4.000 orang, diharapkan hanya ada 2 orang yang mendapat reaksi buruk setelah disuntik.

$$P(0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 0{,}1353$$

b. **Dalam hal ini X = 2, sehingga**

$$P(0) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 0{,}2706$$

c. Ini tidak lain dari rata-rata λ, yaitu 2.

7.5. DISTRIBUSI UNIFORM

Ini adalah distribusi peluang diskret yang paling sederhana, yaitu perubah acaknya memperoleh semua harganya dengan peluang yang sama. Nama lain distribusi uniform adalah distribusi seragam.

Bila perubah acak X mendapat harga $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dengan peluang yang sama, maka distribusi uniform diberikan oleh

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{1}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7(5)$$

dengan $\mathbf{x = x_1,x_2, \ldots\ldots,x_k}$

Dalam hal ini distribusi uniform tergantung parameter k.

Contoh 7.9

Bila sebuah dadu dilanturkan, maka tiap elelmen dalam ruang kejadian S, akan muncul dengan peluang 1/6. Jadi, merupakan distribusi peluang dengan fungsi

$$P(X) = \frac{1}{6}, \quad x = 1,2, \ldots\ldots, 6$$

7.6. DITRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

Perhatikan ilustrasi sebagai berikut :

Misalkan diketahui penggunaan semacam obat 60 % manjur untuk mengobati suatu penyakit. Penggunaan obat tersebut dianggap sukses bila dapat menyembuhkan si penderita sampar taraf tertentu. Ingin diketahui peluang penderita ke 5 yang sembuh merupakan orang ke 7 yang menerima obat tersebut. Misalkan S=sukses, G= gagal , Anggap urutan yang mungkin dalam 7 kali percobaan adalah SGSSSGS. Peluang kejadianseperti dalam urutan tersebut adalah (0,6)(0,4) (0,6)(0,6)(0,6)(0,4)(6,) = $(0,6)^5.(0,4)^2$.

Semua urutan yang mungkin dari percobaan pertama sampai ke - 6 adalah sebanyak $\binom{6}{4} = 15$

Jadi, bila x menyatakan hasil yang membuahkan sukses yang ke lima, maka

$$P(X=7) = \binom{6}{4} (0,6)^5 (0,4)^2 = 0,1866$$

Percobaan yang saling bebas dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan peluang P sedangkan gagal dengan peluang, maka distribusi perubah acak x, yaitu banyaknya kejadian yang berakhir tapat pada sukses ke-k, diberikan oleh distribusi binomial negatif.

$$P(X) = \binom{x-1}{k-1} P^k(1-P)^{x-k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7.6)$$

dengan X = k, k+1, k+2, ...

Contoh 7.10.

Carilah peluang bahwa seseorang yang melantunkan 3 uang logam sekaligus akan mendapat semuanya muka atau samanya belakang untuk kedua kalinya pada lanturan kelima.

Jawab :

Dengan menggunakan distribusi binomial negatif untuk x=5,k=2, p=1/4

$$P(5) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{4!\ 3^3}{1!\ 3!\ 4^5} = \frac{27}{256}$$

Misalkan dalam hal ini k=1, yaitu percobaan dengan mendapat 1 kali sukses pada kasus pelanturan 1 uang logam sampai muncul muka atau diinginkan mendapat muka pertama kali pada lanturan ke 4. Dalam kasus ini, distribusi binomial negatif akan berubah menjadi

$$P(X) = P(1-P)^{X-1}$$

Karena urutan semua suku ini membentuk deret geometrik, maka distribusi ini disebut sebagai distribusi geometrik.

Rumusnya:

$$P(X = x) = P(1-P)^{X-1} \quad \text{.........(7.7)}$$

dengan x = 1, 2, 3, ...

Jawab:

a. Dengan menggunakan pendekatan distribusi Poisson kepada binomial diperoleh λ = Np = 4000 x 0,0005 = 2

   Jika X = banyak orang yang mendapat reaksi buruk akibat suntikan itu, maka

Contoh 7.11.

Dalam suatu proses produksi, diketahui bilaman rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi, cacat. Berapa peluang memeriksa 5 butir dan baru menemukan yang cacat pada pemeriksaan ke 5?

Jawab:

Gunakan distribusi geometrik dengan X=5, p = 0,01

sehingga diperoleh

$$g\ (5{,}0{,}01) = (0{,}01)(0{,}09)^4$$
$$= 0{,}0096$$

7.7. SOAL LATIHAN.

1. X menyatakan banyak pengunjung ke suatu tempat dengan pola :
   $P(x) = 2^{-(1+x)}$; $x = 0,1,2,3$,...
   a. berapa peluang akan terdapat 3 pengujung
   b. berapa peluang terdapat antara 2 dan 5 pengunjung
   c. berapa peluang palig sedikit ada 5 pengunjung

2. Semacam alat elektronik mempunyai daya pakai (dalam ribuan jam) yang mengikuti pola distribusi :
   $f(x) = e^{-x}$, untuk $x > 0$

   Berapa % diperkirakan alat yang memiliki daya pakai :
   a. paling lama 10 ribu jam
   b. antara 2000 sampai 4500 jam
   c. lebih dari 2500 jam

3. Diberikan distribusi peluang untuk peubah acak X pada titik x :

x	p(x)
0	0,4
1	2a
2	0,3
3	a

   a. tentukan harga a
   b. cari peluang peubah acak paling sedikit berharga 1

4. Peluang seorang mahasiswa yang baru masuk univee-rsitas akan lulus tepat pada waktunya adalah 0,23. Tentukan peluang dari 20 mahasiswa akan lulus tepat pada waktunya :
   a. tak seorangpun
   b. seorang mahasiswa
   c. paling sedikit seorang

5. Sepuluh % produksi baut ternyata rusak. Baut-baut itu dijual dalam kotak. Setiap kotak berisi 25 buah. Tentukan peluang sebuah kotak akan berisi:
   a. semua baut bagus
   b. paling banyak 2 yang rusak
   c. paling sedikit 3 yang rusak